Szereg Fouriera

Szeregiem trygonometrycznym nazywamy szereg postaci

(1) $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

gdzie a_0, a_n, b_n są pewnymi stałymi.

Szeregiem Fouriera odpowiadającym danej funkcji *f* całkowalnej w przedziale $\langle -\pi,\pi\rangle$ nazywamy taki szereg trygonometryczny, którego współczynniki zwane współczynnikami Eulera-Fouriera obliczono wg wzorów:

(2) $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

dla $n=1, 2, 3...$

Szereg Fouriera odpowiadający danej funkcji *f* może być zbieżny (i to niekoniecznie do $f(x)$) lub rozbieżny.

Szereg trygonometryczny Fouriera

Trygonometryczny szereg Fouriera dla przebiegów okresowych ma postać:

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t)$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$ - współczynniki widma parzystego

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\sin(k\omega_0 t)dt$$ - współczynniki widma nieparzystego

Trygonometryczny szereg Fouriera jest równoważny wykładniczemu szeregowi Fouriera i zawsze postać wykładniczą można przekształcić do postaci trygonometrycznej i odwrotnie. Wynika to z faktu, że każdą liczbę zespoloną można przedstawić w postaci wykładniczej lub trygonometrycznej.

Definicja:

Wypadałoby zacząć od definicji. Szeregiem Fouriera nazywamy nieskończony szereg funkcyjny w postaci:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\, nx + b_n sin\, nx$$

Szereg Fouriera pozwala funkcję okresową o okresie 2π przedstawić za pomocą sumy funkcji trygonometrycznych.

Współczynniki (wzory Eulera-Fouriera) a_n i b_n dla funkcji określonej na przedziale $[-\pi, \pi]$ definiowane są w następujący sposób:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx$$

Wzory Eulera-Fouriera przybierają prostszą postać w dwóch przypadkach, gdy rozwijana w szereg funkcja jest parzysta albo nieparzysta ($f(x) = f(-x)$ albo $-f(x) = f(-x)$).

Funkcje parzyste:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx,\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, cos\, nx\, dx,\ b_n = 0$$

Funkcje nieparzyste:

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, sin nx\, dx$$

Jak widać, powyższe wzory znacznie ułatwiają obliczenie współczynników. Zmienia się przede wszystkim przedział całek oznaczonych.

Amplituda i faza harmonicznej

$$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \sin(k\omega_0 t + \Psi_k)$$

gdzie:

$$\cos \Psi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \qquad \sin \Psi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$

lub

$$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(k\omega_0 t + \vartheta_k)$$

gdzie:

$$\cos \vartheta_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \qquad \sin \vartheta_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$

podstawiając za

$$h_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

otrzymamy inną postać szeregu trygonometrycznego Fouriera:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin(k\omega_0 t + \Psi_k) \qquad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos(k\omega_0 t + \vartheta_k)$$

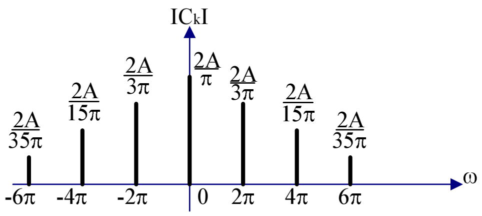
h_k – amplituda k-tej harmonicznej, ψ_k, ϑ_k – faza początkowa k-tej harmonicznej, ω_0-pulsacja podstawowa

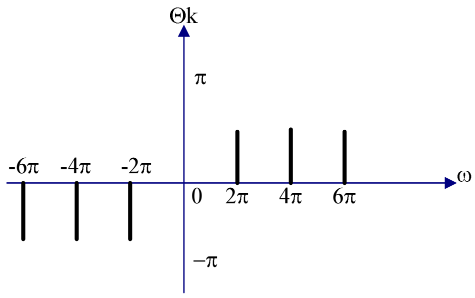
Widmo sygnału

Funkcja okresowa o okresie T rozłożona w szereg Fouriera zawiera składowe o częstotliwościach ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$...Wartości poszczególnych składowych są równe współczynnikom szeregu Fouriera. Układ współczynników odpowiadających poszczególnym częstotliwościom tworzy tzw. widmo częstotliwościowe. Istnieją więc dwa sposoby przedstawiania funkcji: w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości.

Dla przedstawienia funkcji w dziedzinie częstotliwości potrzebne są dwa widma: widmo amplitudowe i widmo fazowe.

Widmo amplitudowe rzeczywistej funkcji okresowej jest symetryczne względem osi pionowej przechodzącej przez początek układu (jest to funkcja parzysta). Widmo fazowe jest funkcją symetryczną względem początku układu (funkcja nieparzysta).





Widmo amplitudowe i fazowe wyprostowanego sygnału sinusoidalnego

Szereg wykładniczy Fouriera

Warunki Dirichleta dla funkcji f(t):

1. funkcja f(t) musi posiadać skończone wartości maksimów i minimów w każdym skończonym przedziale
2. funkcja f(t) musi posiadać skończoną liczbę punktów nieciągłości w każdym skończonym przedziale
3. funkcja f(t) musi być bezwzględnie całkowalna

Dowolną, spełniającą warunki Dirichleta funkcję f(t) w przedziale (t_0, t_0+T) można przedstawić za pomocą sumy funkcji wykładniczych:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{dla} \qquad t_0 < t < t_0+T$$

Współczynniki c_k szeregu Fouriera przyjmują postać:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega_0}} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Współczynnik c_k otrzymujemy poprzez aproksymację funkcji zespolonych w określonym przedziale. Współczynniki c_k wyznaczone zostały z warunku minimalizacji błędu średniokwadratowego.

Przykład 1:

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję: $f(x) = x$ na przedziale $[-\pi, \pi]$

Funkcja liniowa jest nieparzysta, potrzebny jest więc tylko współczynnik b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, sin\, nx\, dx$$

Zanim przejdziemy do właściwych obliczeń warto obliczyć sobie najpierw całki nieoznaczone:

$$\int cos\, nx\, dx, \quad \int sin\, nx\, dx$$

Całki te obliczymy metodą "przez podstawianie":

$$\int cos\, nx\, dx = \left\{\begin{array}{c} t = nx \\ dt = n\, dx \\ \frac{dt}{n} = dx \end{array}\right\} = \frac{1}{n}\int cos\, t\, dt = \frac{sin\, nx}{n} + C$$

,

$$\int sin\, nx\, dx = \left\{\begin{array}{c} t = nx \\ dt = n\, dx \\ \frac{dt}{n} = dx \end{array}\right\} = \frac{1}{n}\int sin\, t\, dt = -\frac{cos\, nx}{n} + C$$

Zabierzmy się za współczynnik b_n, obliczmy najpierw całkę nieoznaczoną:

$$\frac{2}{\pi}\int x\, sin\, nx\, dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x & v' = sin\, nx \\ u' = 1 & v = -\frac{cos\, nx}{n} \end{array}\right\} =$$

$$\frac{-2x\, cos\, nx}{\pi\, n} + \frac{2}{\pi\, n}\int cos\, nx\, dx = \frac{-2x\, cos\, nx}{\pi\, n} + \frac{2 sin\, nx}{\pi\, n^2}$$

Kończymy "oznaczając całkę":

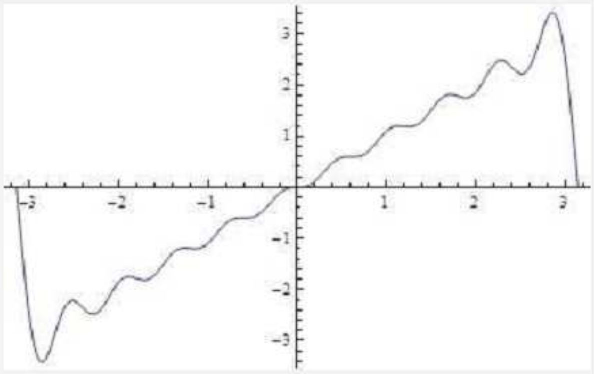
$$\frac{-2\pi cos\, \pi n}{\pi n} + \frac{2 sin\, \pi n}{\pi n^2} = \frac{-2\pi n cos\, \pi n}{\pi n^2} + \frac{2 sin\, \pi n}{\pi n^2} =$$

$$\frac{2(-\pi n\, cos\, \pi n + sin\, \pi n)}{\pi n^2} = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

W powyższym równaniu (lewa strona) sinus zawsze będzie równy 0, cosinus z kolei przyjmuje kolejno wartości: -1, 1, -1, 1... itd.. Stąd takie uproszenie.

Wracamy teraz do definicji szeregu, współczynnik a_n jest równy 0 dla dowolnego n więc wystarczy podstawić współczynnik b_n:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} sin\, nx$$



Wykres dla n=10

Przykład 2:

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję: $f(x) = |x|$ na przedziale $[-\pi, \pi]$.

Funkcja ta jest parzysta, więc od razu wiadomo z jakich wzorów na współczynniki będziemy korzystać. Nasuwa się tylko jedno pytanie: Skąd wziąć całkę z $f(x)$?

Spójrzmy na tą funkcję w inny sposób, na przedziale $[0, \pi]$ jest to funkcja liniowa. W poprzednim przykładzie rozwijaliśmy tą funkcję **według sinusów** (Funkcja liniowa i funkcja sin są nieparzyste). Jako, że $f(x)$ jest parzysta, funkcja liniowa po odbiciu względem OY będzie również parzysta, wystarczy więc tylko rozwinąć funkcję liniową **według kosinusów**.

Potrzebna nam będzie następująca całka:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$\int f(x)g(x)dx = \int v'(x)u(x)dx = v(x)u(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\frac{2}{\pi}\int x\cos nx\,dx = \begin{Bmatrix} u = x & v' = \cos nx \\ u' = 1 & v = \frac{\sin nx}{n} \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{2x\sin nx}{\pi n} - \frac{2}{\pi n}\int \sin nx\,dx = \frac{2x\sin nx}{\pi n} + \frac{2\cos nx}{\pi n^2}$$

Uwzględniamy przedział $[0, \pi]$:

$$\frac{2\pi\sin\pi n}{\pi n} + \frac{2\cos\pi n}{\pi n^2} - \frac{2}{\pi n^2} =$$

$$\frac{2\pi n\sin\pi n + 2\cos\pi n - 2}{\pi n^2} =$$

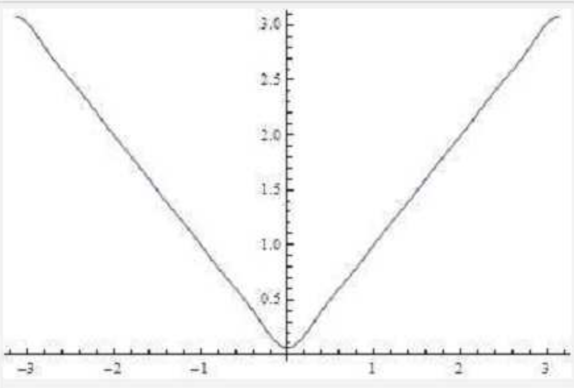
$$\frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^2}$$

Z powyższego wzoru niestety nie obliczymy współczynnika a_0. Należy więc policzyć całkę:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

Podstawiamy teraz współczynniki i mamy gotowy szereg:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^2}\cos nx$$



Wykres dla n=10

Przykład 3:

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję: $f(x) = x^2 - 3x$ na przedziale $[-\pi, \pi]$.

Niestety ta funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta, do rozwinięcia funkcji w szereg potrzebne będą wszystkie współczynniki.

Zacznijmy od współczynnika a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 - 3x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3x\,dx =$$

$$\frac{x^3}{3\pi} - \frac{3x^2}{2\pi} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi^2}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Kolejna całka:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - 3x) cos\, nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cos\, nx\,dx - \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x cos\, nx\,dx$$

.

Zabierzmy się za pierwszą z całek:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cos\, nx\,dx = \begin{Bmatrix} u = x^2 & v' = cos\, nx \\ u' = 2x & v = \frac{sin\, nx}{n} \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{x^2 sin\, nx}{\pi n} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x sin\, nx\,dx =$$

$$\frac{x^2 sin\, nx}{\pi n} + \frac{2x cos\, nx}{\pi n^2} + \frac{2 sin\, nx}{\pi n^3} =$$

$$\frac{2 cos\, \pi n}{n^2} + \frac{2 cos(-\pi n)}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2} + \frac{2(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

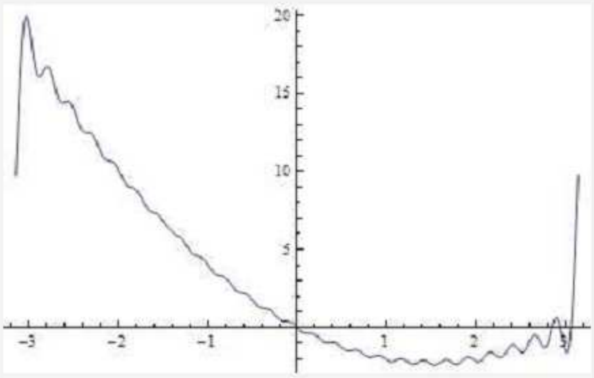
Druga całka na przedziale $[-\pi, \pi]$ jest równa zero, więc współczynnik a_n znajduje się linijkę wyżej.

Jeżeli chodzi o współczynnik b_n to obliczenie całki jest analogiczne jak w poprzednim przykładzie, dlatego po prostu podam wynik.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - 3x) sin\, nx\,dx = \frac{6(-1)^n}{n}.$$

Tak wygląda szereg:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} cos\, nx + \frac{6(-1)^n}{n} sin\, nx.$$



Wykres dla n=25

Przykład 4.

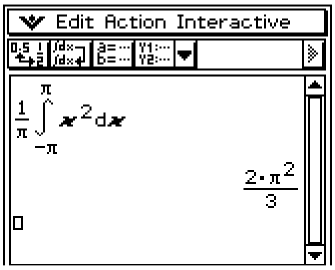
Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x^2$.

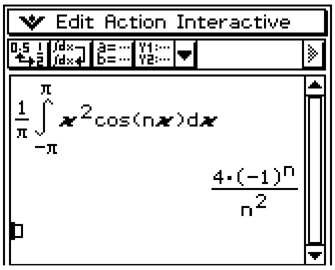
Przedłużając w sposób 2π-okresowy naszą funkcję, otrzymujemy funkcję spełniającą założenia twierdzenia. Liczymy kolejno wg (2):

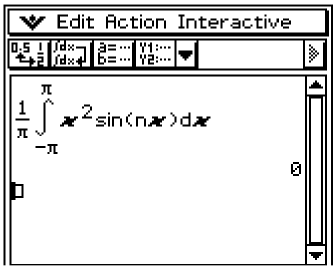
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx$$







Zatem, zgodnie z (1), dostajemy dla każdego $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$S(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} = x^2$$

Kładąc $x = 0$ otrzymujemy po prostych przekształceniach ciekawy wynik:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2$$